Università Ca' Foscari Venezia, Corso di Laurea in Informatica

Esame di Calcolo 2 *- Prof. D. Pasetto*

Tema A - 03/06/2022
Tempo a disposizione: 2h 30min

Cognome .... Nome .... Matricola .... Aula-Posto ....

Norme generali:

- Non girare il foglio fino all'inizio dell'esame.
- Tenere sul tavolo solo lo stretto necessario per l'esame.
- NON è permesso utilizzare libri o quaderni, calcolatrici che facciano grafici o calcolino integrali, telefoni cellulari o altri dispositivi atti a comunicare. Per Calcolo 2 è permesso utilizzare un formulario su un foglio A4.
- Durante la prova sarà necessario rimanere al proprio posto, indossando sempre la mascherina. Non sarà possibile uscire durante la prova.
- Al termine della prova, i docenti passeranno fila per fila per raccogliere gli scritti. Solo al termine delle operazioni di consegna, si potrà abbandonare l'aula, una fila alla volta per evitare assembramenti, rispettando le indicazioni dei docenti.
- Siate ordinati nella risoluzione degli esercizi e scrivete cognome e nome su ogni foglio.

Ulteriori indicazioni per chi fa l'esame in via telematica:

- La telecamera deve inquadrare sia il vostro volto che le vostre mani.
- Alla fine dell'esame fotografare SOLO i fogli di bella facendo attenzione di mettere a fuoco. Raccogliere le foto ordinate in un unico file pdf e caricarlo su moodle col nome: "CognomeNome.pdf".
- La sezione moodle per l'upload del compito rimarrà attiva fino a pochi minuti dopo la fine dell'esame. Se non è stato possibile caricare il compito in tempo bisogna contattare il docente e sarà richiesto di fare l'orale.
- Se avrete dei problemi di connessione, siete comunque invitati a caricare il vostro elaborato nella sezione di moodle. Vi sarà poi richiesto di sostenere l'orale.
- Potete lasciare la teleconferenza solo quando gli assistenti vi confermeranno l'avvenuta consegna in moodle.

Problema 1 (7 punti)

1.1 Calcolare tutte le soluzioni dell'equazione $(x^2 - 1)y' = x(y + 1)$.

1.2 Trovare la soluzione che soddisfi la condizione iniziale $y(0) = -1$ e determinarne il dominio di esistenza.

1.3 Trovare la soluzione che soddisfi la condizione iniziale $y(0) = -2$ e determinarne il dominio di esistenza.

Problema 2 (8 punti)

Considerare la curva γ descritta dalla parametrizzazione $\mathbf{r}(t)$ definita per parti

$$\mathbf{r}(t) = \begin{cases} \mathbf{r}_1(t) = (0, \quad 2t)\,, & \text{se } t \in [-2\ ,\ 0]\,; \\ \mathbf{r}_2(t) = (2\sin(\pi t), -t^2) & \text{se } t \in \,]0\ ,\ 2] \end{cases}$$

2.1 Determinare se γ è continua, chiusa, semplice e regolare.

2.2 Disegnare il supporto della curva. Indicare il verso di percorrenza.

2.3 Scrivere l'equazione cartesiana e parametrica della retta tangente a γ in $t_0 = 1$.

2.4 Sia $f(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{-y - \frac{\pi^2}{4}x^2 + \pi^2}}$.

Verificare che il sostegno della curva γ è contenuto nel dominio di f e calcolare l'integrale curvilineo $\int_{\mathbf{r}_2} f$.

Problema 3 (9 punti)

Sia $f(x, y) = \log(y^2 - 4x^2) - 4y^2$.

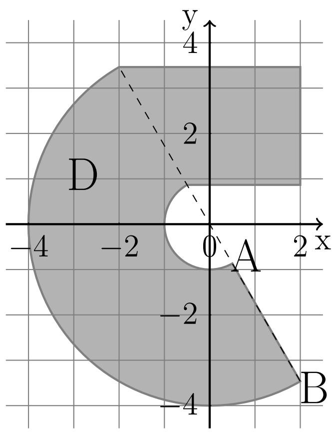
3.1 Determinare il dominio di f e dire se la funzione è di classe $\mathcal{C}^2$. Disegnare, se possibile, il grafico delle sezioni $x = 0$ e $y = 0$.

3.2 Determinare l'esistenza di eventuali punti critici di f e stabilire se tali punti sono di massimo o minimo relativo o di sella.

3.3 Determinare il versore di massima crescita nel punto $(0, -\frac{1}{2})$ e scrivere l'equazione del piano tangente in tale punto.

Problema 4 (6 punti)

Sia D il dominio rappresentato in figura dove le curve alla frontiera sono due archi di circonferenza di centro $(0, 0)$; i vertici A e B hanno coordinate $A = (\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$, $B = (2, -2\sqrt{3})$. Utilizzare gli integrali doppi per calcolare l'area e la coordinata y del baricentro di D.



Soluzioni

Problema 1 (7 punti)

1.1 Calcolare tutte le soluzioni dell'equazione $(x^2-1)y' = x(y+1)$.

L'equazione differenziale ordinaria è del primo ordine a variabili separabili.

Si nota che $y = -1$ è soluzione costante dell'equazione. Inoltre, per $x = \pm 1$ si ottiene il valore $y = -1$. Si considera quindi $y \neq -1$ e $x \neq \pm 1$, si separano le variabili e si integrano ambo i membri:

$$\begin{aligned}
\int \frac{y'}{(y+1)}\,dx &= \int \frac{x}{x^2-1}\,dx \\
\log|y+1| &= \frac{1}{2}\log|x^2-1| + c \qquad , c \in \mathbb{R} \\
|y+1| &= \sqrt{|x^2-1|}\mathrm{e}^c \\
y &= -1 \pm \mathrm{e}^c\sqrt{|x^2-1|}
\end{aligned}$$

Quindi tutte le soluzioni si possono scrivere come

$$\begin{cases} y = -1 + c_2\sqrt{|x^2-1|} & \text{se } y \geq -1 \\ y = -1 - c_2\sqrt{|x^2-1|} & \text{se } y < -1 \end{cases}$$

dove $c_2 \geq 0$ (la soluzione costante è inclusa ponendo $c_2 = 0$). Per $c_2 \neq 0$, tali funzioni sono definite nei domini $x < -1$, $-1 < x < 1$, $x > 1$. In questo caso i valori $x = \pm 1$ non sono ammissibili in quanto la funzione non è derivabile in tali punti.

1.2 Trovare la soluzione che soddisfi la condizione iniziale $y(0) = -1$ e determinarne il dominio di esistenza.

Bisogna considerare la soluzione costante, $y(x) = -1$; dominio: $x \in \mathbb{R}$

1.3 Trovare la soluzione che soddisfi la condizione iniziale $y(0) = -2$ e determinarne il dominio di esistenza.

Bisogna considerare soluzione per $y < -1$ e imporre le condizioni iniziali:

$$-2 = -1 - c_2\sqrt{|-1|} \implies c_2 = 1$$

Si noti che il dominio di definizione per questo punto iniziale è $-1 < x < 1$. Quindi la soluzione del problema di Cauchy è $y = -1 - \sqrt{1-x^2}$, con $x \in]-1, 1[$.

Problema 2 (8 punti)

Considerare la curva γ descritta dalla parametrizzazione $\mathbf{r}(t)$ definita per parti

$$\mathbf{r}(t) = \begin{cases} \mathbf{r}_1(t) = (0, \quad 2t)\,, & \text{se } t \in [-2\ ,\ 0]\,; \\ \mathbf{r}_2(t) = (2\sin(\pi t), -t^2) & \text{se } t \in]0\ ,\ 2] \end{cases}$$

2.1 Determinare se γ è continua, chiusa, semplice e regolare.

Continuità, chiusura, semplicità e regolità si possono dedurre dal grafico del supporto.

$\mathbf{r}_1$ e $\mathbf{r}_2$ sono continue. Inoltre

$$\mathbf{r}_1(0) = (0,0) = \mathbf{r}_2(0)$$

quindi anche γ è continua.

Si ha $\mathbf{r}(-2) = \mathbf{r}_1(-2) = (0,-4)$ e $\mathbf{r}(2) = \mathbf{r}_2(2) = (0,-4)$, quindi γ è chiusa.

Per la semplicità, conviene partire dal supporto dei due archi di curva: il supporto di $\mathbf{r}_1$ è il segmento rettilineo da $(0,-4)$ a $(0,0)$, quindi è semplice. Il supporto della curva $\mathbf{r}_2$ è il grafico della funzione $x = 2\sin(\pi\sqrt{-y})$, con $-4 \leq y < 0$, quindi è semplice.

Le due curve si intersecano in $(0,-1)$, a cui corrispondono i valori $t = -\frac{1}{2}$ e $t = 1$, quindi la parametrizzazione $\mathbf{r}(t)$ non è semplice.

Tale conclusione si può ottenere anche facendo i conti: cerchiamo $t_1 \in [-2,0]$ e $t_2 \in]0,2]$ per cui $\mathbf{r}_1(t_1) = \mathbf{r}(t_2)$. Dalla prima seconda componente: $\pi t_2 = k\pi$ con $k = 1,2$. Dalla seconda componente troviamo $2t_1 = -t_2^2$. Prendendo $t_2 = 2$ si ha $t_1 = -2$, che corrispondono agli estremi dell'intervallo (punti di chiusura). Prendendo $t_2 = 1$ si ha $t_1 = -1/2$, e $\mathbf{r}(t_1) = \mathbf{r}(t_2)$, quindi la curva non è semplice.

Per la regolarità bisogna calcolare il vettore tangente a $\mathbf{r}_1$,

$$\mathbf{r}_1'(t) = (0,2)$$

e a $\mathbf{r}_2$,

$$\mathbf{r}_2'(t) = (2\pi\cos(\pi t), -2t)$$

Entrambe le parametrizzazioni sono regolari, in quanto i vettori velocità sono continui e non si annullano. Però $\mathbf{r}(t)$ non è regolare in quanto $\mathbf{r}'(t)$ non è continuo in $t = 0$:

$$\mathbf{r}_2'(0) = (2\pi, 0) \neq \mathbf{r}_1'(0)$$

2.2 Disegnare il supporto della curva. Indicare il verso di percorrenza.

Il supporto di $\mathbf{r}_1$ è il segmento rettilineo da $(0,-4)$ a $(0,0)$. Il supporto della curva $\mathbf{r}_2$ si ottiene isolando il parametro:

$$y = -t^2, \quad t \in]0,2] \implies |t| = \sqrt{-y}, \quad y \in [-4, 0[$$

dove il modulo si può levare in quanto $t > 0$. Dalla seconda componente:

$$x = 2\sin(\pi\sqrt{-y}), \quad -4 \leq y < 0$$

quindi il supporto di $\mathbf{r}_2$ è il grafico di questa funzione.

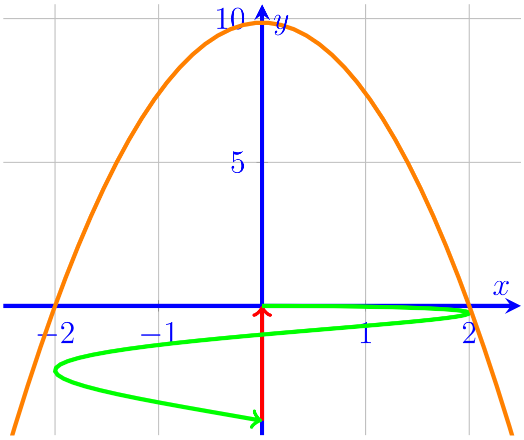


Figura 1: Supporto della curva parametrica ($\mathbf{r}_1$ in rosso e $\mathbf{r}_2$ in verde), e frontiera del dominio di $f(x,y)$.

2.3 Scrivere l'equazione cartesiana e parametrica della retta tangente a γ in $t_0 = 1$.

Si ha $\mathbf{r}(1) = (0,-1)$ e $\mathbf{r}'(1) = (-2\pi, -2)$. Quindi un'eq. parametrica della retta tangente è:

$$\begin{cases} x(t) = -2\pi(t-1) \\ y(t) = -1 - 2(t-1) \end{cases}$$

L'equazione cartesiana è $y = -1 + \frac{1}{\pi}x$.

2.4 Sia $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{-y - \frac{\pi^2}{4}x^2 + \pi^2}}$.

Verificare che il sostegno della curva γ è contenuto nel dominio di f e calcolare l'integrale curvilineo $\int_{\mathbf{r}_2} f$.

Il dominio di $f(x,y)$ è $y < -\frac{\pi^2}{4}x^2 + \pi^2$, quindi il supporto della curva è contenuto nel dominio.

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbf{r}_2} f(x,y)\, d\mathbf{s} &= \int_0^2 f(2\sin(\pi t), -t^2)\|\mathbf{r}_1'\|\, dt \\
&= \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{t^2 - \pi^2\sin^2(\pi t) + \pi^2}} \sqrt{4\pi^2\cos^2(\pi t) + 4t^2}\, dt = \\
&= \int_0^2 \frac{2\sqrt{\pi^2\cos^2(\pi t) + t^2}}{\sqrt{\pi^2\cos^2(\pi t) + t^2}}\, dt = \\
&= \int_0^2 2\, dt = 4
\end{aligned}$$

Problema 3 (9 punti)

Sia $f(x,y) = \log(y^2 - 4x^2) - 4y^2$.

3.1 Determinare il dominio di f e dire se la funzione è di classe $\mathcal{C}^2$. Disegnare, se possibile, il grafico delle sezioni $x = 0$ e $y = 0$.

Il dominio di f è dato da $y^2 - 4x^2 > 0$ per cui:

$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y < -2|x| \ \vee y > 2|x|\}$ Si tratta della regione del piano al di sopra del grafico di $y = 2|x|$ e al di sotto di $y = -2|x|$. La funzione è $\mathcal{C}^2(D_f)$ in quanto composizione e somma di funzioni $\mathcal{C}^2(D_f)$ in x e y (anche $\mathcal{C}^\infty$).

Il grafico delle sezioni sono mostrati in Figura 2 e 3.

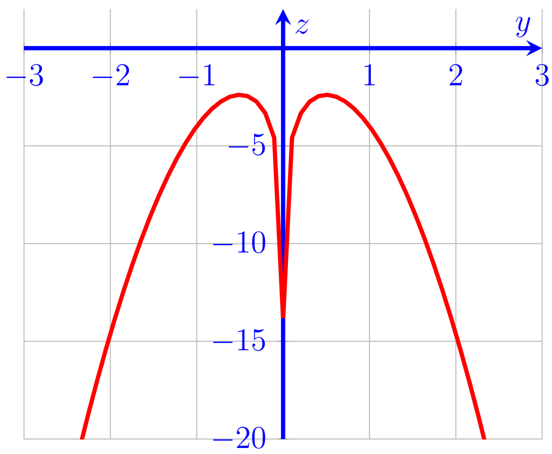


Figura 2: Sezione $x = 0$, $z = \ln(y^2) - 4y^2$. La sezione $y = 0$ non ha punti.

3.2 Determinare l'esistenza di eventuali punti critici di f e stabilire se tali punti sono di massimo o minimo relativo o di sella.

Il gradiente di f è:

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{-8x}{y^2-4x^2} \\ \frac{2y}{y^2-4x^2} - 8y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-8x}{y^2-4x^2} \\ \frac{2y-8y^3+32yx^2}{y^2-4x^2} \end{pmatrix}$$

Imponendo $\nabla f(x,y) = 0$ si ottiene dalla prima equazione $x = 0$. Sostituendo nella seconda:

$$2y - 8y^3 = 2y(1 - 4y^2) = 0$$

da cui si ottengono i punti $(0,0)$, $(0, \pm\frac{1}{2})$. Siccome $(0,0) \notin D_f$, I punti critici sono: $P_1 = (0, \frac{1}{2})$, e $P_2 = (0, -\frac{1}{2})$.

Si usa il test della matrice Hessiana per caratterizzare tali punti. In un punto (x,y) la matrice Hessiana H_f è:

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{-8(y^2-4x^2)+8x(-8x)}{(y^2-4x^2)^2} & \frac{8x(2y)}{(y^2-4x^2)^2} \\ \frac{8x(2y)}{(y^2-4x^2)^2} & \frac{2(y^2-4x^2)-2y(2y)}{(y^2-4x^2)^2} - 8 \end{pmatrix}$$

- P_1: $H_f(0,1/2) = \begin{pmatrix} -32 & 0 \\ 0 & -16 \end{pmatrix}$, det $(H_f(0,1/2)) = 32 * 16 > 0$ e il primo termine di $H_f(0,\sqrt{\frac{2}{3}})$ vale $-32 < 0$, quindi H_f è definita negativa in P_1 e P_1 è massimo locale.
- P_2: $H_f(0,-1/2) = \begin{pmatrix} -32 & 0 \\ 0 & -16 \end{pmatrix}$, det $(H_f(0,-1/2) = 32 * 16 > 0$ e il primo termine di $H_f(0,-1/2)$ vale $-40 < 0$, quindi H_f è definita negativa in P_2 e P_2 è massimo locale.

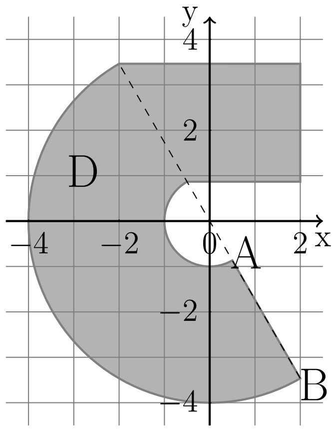
3.3 Determinare il versore di massima crescita nel punto $(0,-\frac{1}{2})$ e scrivere l'equazione del piano tangente in tale punto.

Si può notare che $(0,-1/2)$ è un punto critico, quindi il gradiente è nullo in quel punto e il versore di massima crescita non esiste. L'equazione del piano tangente è:

Il piano tangente ha equazione $z = \log(1/4) - 1 = -2\log(2) - 1$.

Problema 4 (6 punti)

Sia D il dominio rappresentato in figura dove le curve alla frontiera sono due archi di circonferenza di centro $(0,0)$; i vertici A e B hanno coordinate $A = (\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$, $B = (2, -2\sqrt{3})$. Utilizzare gli integrali doppi per calcolare l'area e la coordinata y del baricentro di D.



Il dominio D si può pensare come $D = D_1 \cup D_2$ con:

$$D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = \rho\cos(\theta), y = \rho\sin(\theta), \frac{2}{3}\pi \leq \theta \leq \frac{5}{3}\pi, 1 \leq \rho \leq 4\}$$

$$D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{3}/2 \leq y \leq 2\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}y \leq x \leq 2\}$$

Quindi $\int\int_D dx\,dy = \int\int_{D_1} dx\,dy + \int\int_{D_2} dx\,dy$.

$$\int\int_{D_1} dx\,dy = \int_{2\pi/3}^{5\pi/3} \left(\int_1^4 \rho\,d\rho \right) d\theta = \pi \left[\frac{\rho^2}{2} \right]_1^4 = \frac{15}{2}\pi$$

$$\int\int_{D_2} dx\,dy = \int_{\sqrt{3}/2}^{2\sqrt{3}} \left(\int_{\frac{-\sqrt{3}}{3}y}^{2} 1\,dx \right) dy =$$

$$= \int_{\sqrt{3}/2}^{2\sqrt{3}} 2 + \frac{\sqrt{3}}{3}y\,dy =$$

$$= [\frac{\sqrt{3}}{6}y^2 + 2y]_{\sqrt{3}/2}^{2\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} + 4\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{8} - \sqrt{3} = \frac{39}{8}\sqrt{3}$$

Quindi l'area di D vale $\frac{39}{8}\sqrt{3}+\frac{15}{2}\pi$.
Per il calcolo del secondo integrale calcoliamo $\int\int_{D_1} xy\,dx\,dy$ e $\int\int_{D_2} xy\,dx\,dy$:

$$\begin{aligned}\int\int_{D_1} y\,dx\,dy &= \int_{2\pi/3}^{5\pi/3}\left(\int_1^4 \sin(\theta)\rho^2\,d\rho\right)d\theta = \\ &= \left(\int_{2\pi/3}^{5\pi/3}\sin(\theta)\,d\theta\right)\left(\int_1^4 \rho^3\,d\rho\right) = \\ &= [-\cos(\theta)]_{2\pi/3}^{5\pi/3}\left[\frac{\rho^3}{3}\right]_1^4 = \\ &= \left[-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right]\left[\frac{64}{3}-\frac{1}{3}\right] = -21\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int\int_{D_2} y\,dx\,dy &= \int_{\sqrt{3}/2}^{2\sqrt{3}}\left(\int_{\frac{-\sqrt{3}}{3}y}^{2} y\,dx\right)dy = \\ &= \int_{\sqrt{3}/2}^{2\sqrt{3}} 2y+\frac{\sqrt{3}}{3}y^2\,dy = \\ &= [\frac{\sqrt{3}}{9}y^3+y^2]_{\sqrt{3}/2}^{2\sqrt{3}} = 8+12-\frac{1}{8}-\frac{3}{4} = \frac{153}{8}\end{aligned}$$

La coordina y del baricentro quindi vale:

$$y_B = \frac{\frac{153}{8}-21}{\frac{39}{8}\sqrt{3}+\frac{15}{2}\pi} = -\frac{15}{39\sqrt{3}+60\pi} \approx 0.05$$